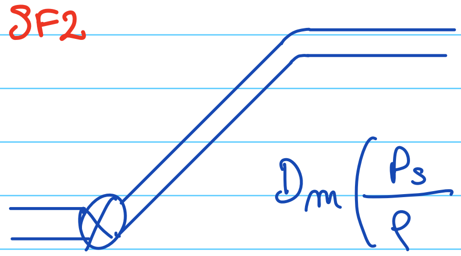
TD M3

SF1

cf cours.

SF2



Appliquons le théorème de Bernoulli entre l'entrée de la pompe et l'usine :

$$D_m\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + g z_s - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + g z_e\right)\right) = \mathcal{P}_i$$

On a $P_s = 2{,}5\ P_{atm}$, $P_e = P_{atm}$

$$z_s - z_e = h = 10\ m$$

La section étant constante et l'écoulement incompressible et stationnaire ;

$$v_e = v_s = \frac{D_v}{S}$$

On a donc

$$\boxed{\mathcal{P}_i = D_v\left(1{,}5\ P_{atm} + \rho g h\right)}$$

AN : $\mathcal{P}_i = \frac{7}{3600}\left(1{,}5\times10^5 + 10^3\times10\times10\right) = \underline{490\ W}$

SF3

cf cours.

SF4

1) Vrai , énergie massique
2) Faux : gz est une énergie massique mais $\frac{1}{2}\rho v^2$ une énergie volumique
3) Faux : Δp et $\frac{P}{\rho}$ dans la m̂ éq^n
4) Vrai : homogène à une puissance
5) Faux : homogène MAIS il manque le $\ominus$ pour la perte de charge
6) Vrai : homogène à une puissance
7) Vrai : homogène à une pression (ou $\bar{e}$ volumique)

Exercice 3 - Production d'énergie hydroélectrique

1) Cours

2) Le lac ayant une surface très grande devant celle de la conduite, on a $v_1 \ll v_2$.

On a par ailleurs $v_2 = \dfrac{Q_{vol}}{S} = \dfrac{4 Q_{vol}}{\pi D^2} = \underline{5 \, m.s^{-1}}$

3) L'écoulement est incompressible et stationnaire. On peut donc appliquer le bilan d'énergie.
Comme on cherche la puissance maximale récupérable, on néglige les pertes de charge :

$$D_m \left[\left(\frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 \right) - \left(\frac{P_{atm}}{\rho} + 0 + g z_1 \right) \right] = -\mathcal{P}$$

$$\mathcal{P} = \underbrace{\rho Q_{vol}}_{D_m} \left(g(z_1 - z_2) - \frac{v_2^2}{2} \right) = \underline{5,8 \, MW}$$

4) La valeur est cohérente, la différence vient des pertes de charge

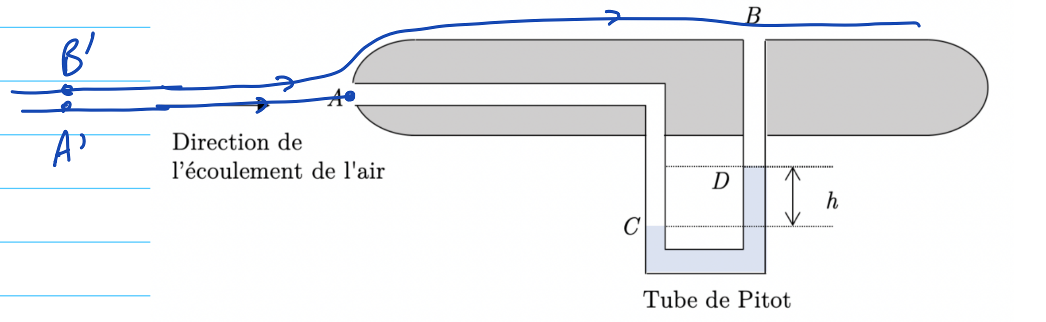
$$\mathcal{P}_{pertes} = \rho Q_{vol} \, g \, \Delta z_c = 0,4 \, \mathcal{P}$$

Donc $\quad \Delta z_c = 0,4 \times \dfrac{\mathcal{P}}{\rho g Q_{vol}} = \underline{9,5 \, m}$

Tout se passe comme si l'écoulement était parfait, mais le lac 9,5 m plus bas.

Exercice 4 - Tube de Pitot

1)



2) $v_A = 0$ d'où le nom "point d'arrêt"

L'écoulement étant parfait, $v_B = v_0$

3) En appliquant le thm de Bernoulli sur la ligne de courant passant par B :

$$\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2} + \cancel{g z_{B'}} = \frac{P_B}{\rho_0} + \frac{v_B^2}{2} + \cancel{g z_B}$$

De m sur la ldc A'A :

$$\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2} + \cancel{g z_{A'}} = \frac{P_A}{\rho_0} + \underbrace{\cancel{\frac{v_A^2}{2}}}_{v_A = 0} + \cancel{g z_A}$$

en combinant : $\frac{P_A}{\rho_0} = \frac{P_B}{\rho_0} + \frac{v_0^2}{2}$

A l'intérieur du tube, le fluide est statique. Pour le gaz on peut donc supposer que $P_A = P_C$ et $P_B = P_D$

De la relation de la statique, on a $P_C - P_D = \rho_\ell g h$

Au final $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2 \rho_\ell g h}{\rho_0}}}$ $= \underline{63 \, m s^{-1}}$

Exercice 5 - Filet d'eau

1) $\eta_{eau} = 10^{-3}$ Pl

Calculons le nombre de Reynolds pour déterminer la nature de l'écoulement :

$$Re = \frac{\ell \rho v}{\eta} \qquad \text{avec ici } \ell = 2r_0 \text{ et } v = \frac{D}{S} = \frac{D}{\pi r_0^2}$$

A.N : $$Re = \frac{2\times \cancel{1.10^{-2}} \times 10^3 \times 0,2.\cancel{10^{-3}}}{\pi(1.10^{-2})^{\cancel{2}} \times 1,0.\cancel{10^{-3}}} = \frac{0,4}{\pi}10^5 = \underline{13.10^3}$$

L'écoulement est donc <u>turbulent</u>

2) On peut supposer l'écoulement parfait (viscosité négligeable), stationnaire (d'après l'énoncé), incompressible (hypothèse raisonnable pour de l'eau)

Le filet d'eau est un tube de courant. On a donc conservation du débit volumique :

$$\pi r_0^2 v_0 = \pi r^2(z)\, v(z) \qquad \text{avec } v_0 = \frac{D}{\pi r_0^2}$$

Appliquons le théorème de Bernoulli sur une ligne de champ entre la sortie du robinet et une altitude z :

$$\frac{P(z)}{\rho} + \frac{v^2(z)}{2} + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

La pression étant uniforme et égale à Patm, on a

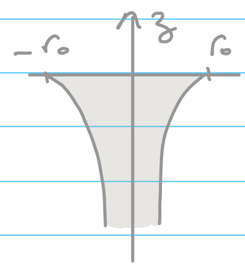
$$\frac{v^2(z)}{2} + gz = \frac{v_0^2}{2}$$

Or $v(z) = \left(\frac{r_0}{r(z)}\right)^2 v_0$, donc : $\left(\frac{r_0}{r(z)}\right)^4 \times \frac{v_0^2}{2} + gz = \frac{v_0^2}{2}$

ie $$z(r) = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right) = \frac{D^2}{2\pi^2 r_0^4 g}\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right)$$

$$\boxed{z(r) = \frac{D^2}{2\pi^2 g}\left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4}\right)}$$

Rq : en traçant, on obtient :



Exercice 6 – Lance incendie

1) On a $Q = v \times S$ avec $S = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ la section du tuyau.

Donc $v = \frac{Q}{S} = \frac{500.10^{-3}}{60 \times \pi \times \left(\frac{70.10^{-3}}{2}\right)^2} = \underline{2,2\ m.s^{-1}}$

2) Il y a vraisemblablement un resserrement du tuyau en sortie, ce qui va augmenter la vitesse d'écoulement.

3) On considère l'écoulement incompressible, stationnaire et parfait. Appliquons le théorème de Bernoulli entre le bas et le haut du tuyau :

$$\frac{P_{haut}}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_{haut} = \frac{P_{bas}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{bas}^2 + g z_{bas}$$

$$\boxed{P_{bas} = \underbrace{P_{haut}}_{= P_{atm}} + \frac{1}{2}\rho\left(v_e^2 - v^2\right) + \rho g h}$$

$$\underline{P_{bas} = 7,8\ bar}$$

4) On a $K = f \frac{\mu v^2}{2d}$ donc $f = \frac{K \times 2d}{\mu v^2}$

$[f] = \frac{[K].L}{M.L^{-3}.L^2.T^{-2}} = [K]\, M^{-1}.L^2.T^2$

or $[K] = [P].L^{-1} = [F].L^{-2}.L^{-1} = M.L.T^{-2}.L^{-3} = M.L^{-2}.T^{-2}$

Donc $[f] = M.L^{-2}.T^{-2}.M^{-1}.L^2.T^2 = \underline{1}$

f est donc sans dimension et sans unité.

5) Appliquons le bilan d'énergie sous forme de puissance entre la surface libre du réservoir et la sortie de la lance :

$$\rho Q\left[\left(\frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gh\right) - \left(\frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2}\times 0^2 + 0\right)\right] = \mathcal{P} - Q \times \frac{K}{\rho} \times l$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance que doit fournir la pompe et l la longueur du tuyau

On a donc $\boxed{\mathcal{P} = \frac{\rho Q v_e^2}{2} + \rho Q h g + Q K l}$ $\underline{= 6,8\ kW}$

Exercice 8 - Ecoulement fluvial ou torrentiel

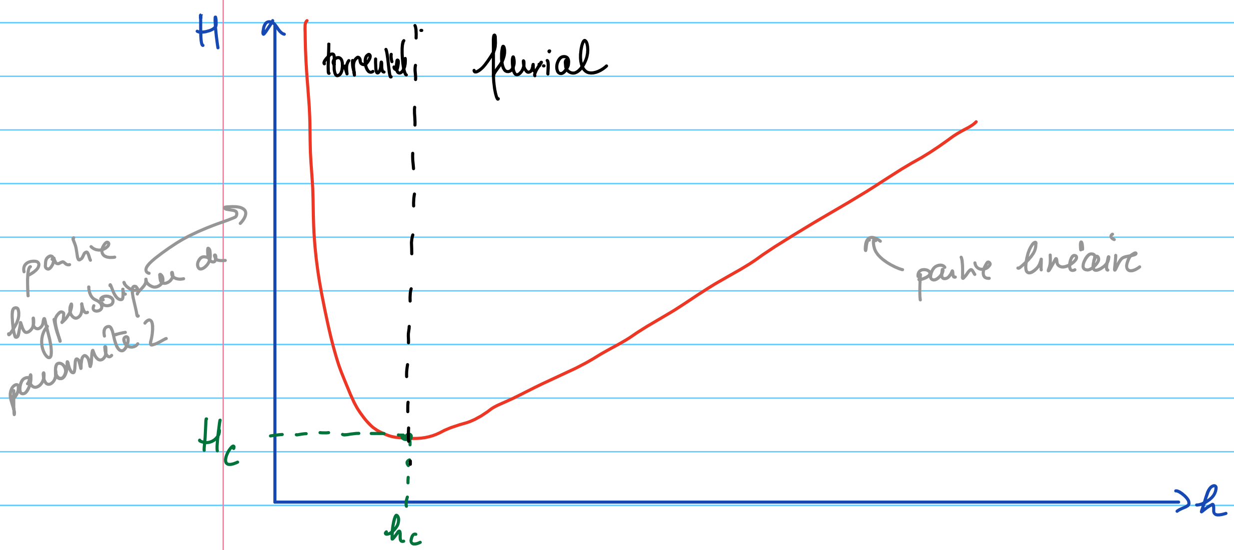
1) L'interface fluide/air peut être considérée comme une ligne de champ.

Ainsi, $\forall x$, $\frac{P_{atm}}{\rho} + g h(x) + \frac{v^2(x)}{2} = cte$.

$\frac{P_{atm}}{\rho}$ étant constante, on a donc bien $h(x) + \frac{v^2(x)}{2g} = cte$

2) On a $Q \overset{\text{car } v \text{ uniforme sur } S}{=} vS = v\,h(x)\,B$ re $v = \frac{Q}{h(x)B}$

Donc $\boxed{H = h(x) + \frac{Q^2}{2h^2(x)B^2g}}$



Quand h très petit, on a $\frac{Q^2}{2h^2B^2g} \gg h$

Donc $H \simeq \frac{Q^2}{2h^2B^2g}$ → partie hyperbolique de paramètre 2

Si h est très grand, on a $h \gg \frac{Q^2}{2h^2B^2g}$

Donc $H \simeq h$ → partie linéaire.

On voit sur la courbe (tracée à Q fixé), qu'il existe toujours 2 antécédents pour une charge spécifique donnée (tant qu'elle est supérieure à H_c)

Soit h' et h'' les deux solutions à $H(h) = H_0$ avec $h' < h''$

Q étant fixé, on a $v'h'B = v''h''B$

ie $\frac{v'}{v''} = \frac{h''}{h'} > 1$

Ainsi pour (h', v') la hauteur d'eau est faible mais la vitesse grande
et pour (h'', v'') " " grande mais la vitesse faible.
Cela correspond à des écoulements respectivement torrentiels et fluviaux.

3) Calculons h_c la hauteur d'eau pour laquelle H est minimale

$$\frac{dH}{dh} = 1 - \frac{2Q^2}{2h^3B^2g}$$

On a donc $1 - \frac{Q^2}{h_c^3 B^2 g} = 0$ ie $\boxed{h_c = \left(\frac{Q}{B}\right)^{2/3} \times \frac{1}{g^{1/3}}}$

On a par ailleurs $Q = v_c h_c B$

Donc $v_c = \frac{Q}{h_c B} = \frac{Q}{B} \times \left(\frac{Q}{B}\right)^{-2/3} g^{1/3} = \underline{\left(\frac{Q}{B} g\right)^{1/3}}$

Au final $H_c = \left(\frac{Q}{B}\right)^{2/3} \times \frac{1}{g^{1/3}} + \frac{Q^2 g^{2/3}}{2\left(\frac{Q}{B}\right)^{4/3} B^2 g}$

$$H_c = \left(\frac{Q^2}{B^2 g}\right)^{1/3} + \frac{Q^{2/3}}{2B^{2/3} g^{1/3}} = \underline{\frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{B^2 g}\right)^{1/3}}$$

4) Si $H = H_0$, on a $H_0 = h + \frac{Q^2}{2B^2h^2g}$

ie $Q = \sqrt{2(H_0 - h)B^2h^2g} = Bh\sqrt{2(H_0-h)g}$

Pour tracer l'allure, déterminons le tableau de variation

$$\frac{dQ}{dh} = B\sqrt{2(H_0-h)g} + Bh\,\frac{1}{2}\,\frac{-2g}{\sqrt{2(H_0-h)g}}$$

$$\frac{dQ}{dh} = B \frac{2(H_0 - h)g - hg}{\sqrt{2(H_0-h)g}} = B\sqrt{g}\,\frac{2H_0 - 3h}{\sqrt{2(H_0-h)}}$$

On a donc $\frac{dQ}{dh} > 0$ si $2H_0 - 3h > 0$

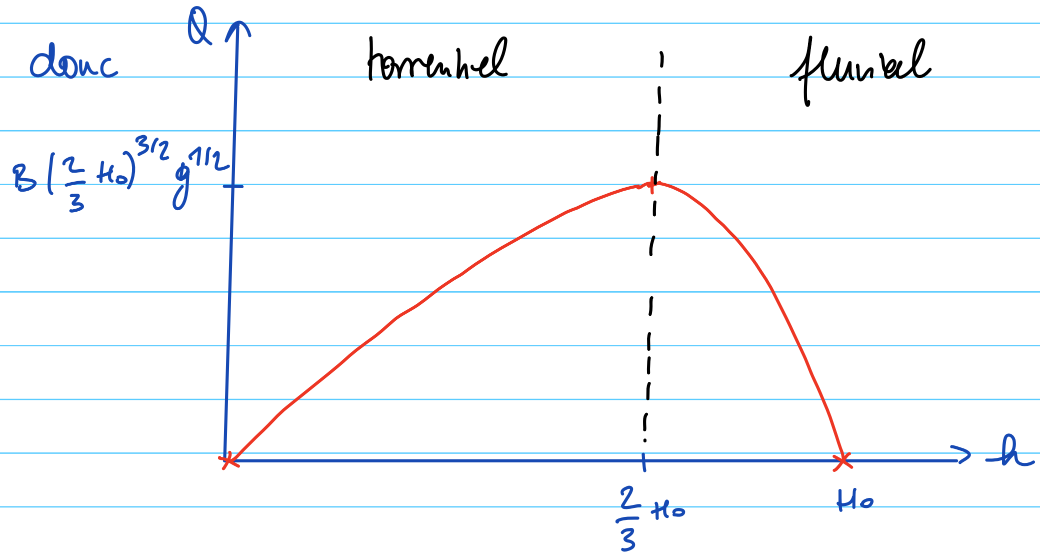
ie $h < \frac{2}{3} H_0$

h	0		$\frac{2}{3}H_0$		H_0
$Q(h)$		$\nearrow$	$B\left(\frac{2}{3}H_0\right)^{3/2} g^{1/2}$	$\searrow$	0

en effet $Q\left(\frac{2}{3}H_0\right) = B\,\frac{2}{3}H_0\sqrt{2\left(H_0 - \frac{2}{3}H_0\right)g}$

$$= B\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} H_0^{3/2}\, g^{1/2}$$

On a donc

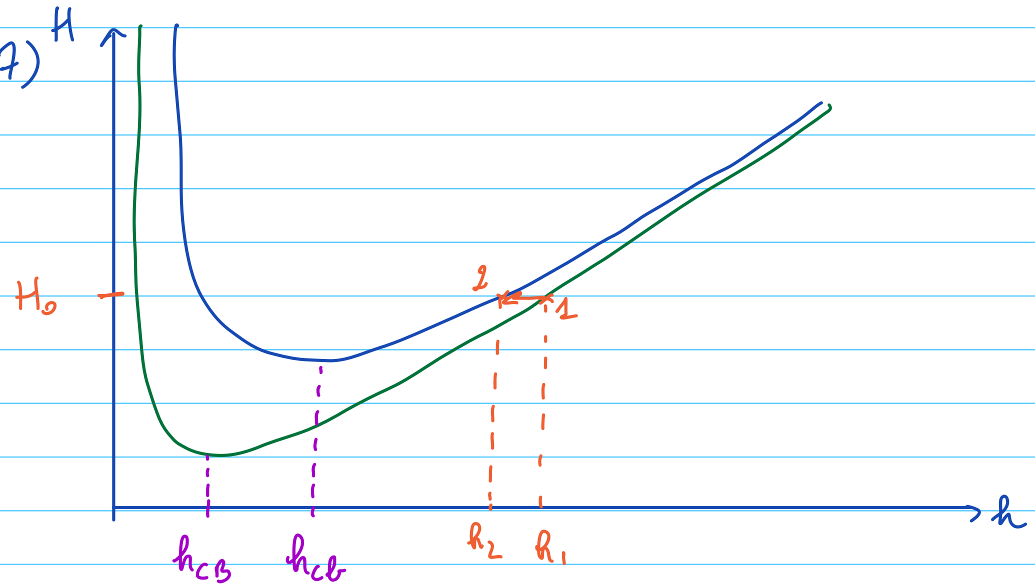


La zone torrentiel correspond à des petites hauteurs d'eau
fluvial " " grandes " ".

5) Le canal d'approche permet d'obtenir un écoulement stationnaire.

6) $Q = v_1 B h_1 = v_2(x)\, b\, h_2(x)$ car le débit volumique se conserve, l'écoulement étant incompressible et stationnaire.

7)



La courbe bleue est celle associé à $H_b(h)$ car le minimum est plus grand que celui de la courbe verte.

Or $H_c = \left(\frac{Q}{B}\right)^{2/3} \times \frac{1}{g^{1/3}} \times \frac{2}{3}$ ainsi, plus le canal est large, plus le minimum est petit.

Le passage $1 \to 2$ a lieu dans la zone d'écoulement fluvial, de la courbe verte vers la courbe bleue.

On aura donc $(h_2 - h_1) < 0$

et $(v_2 - v_1) > 0$ car v est inversement proportionnel à h.

Calculons Q :

$$Q = b\, h_2 \sqrt{2(H_0 - h_2)g}$$

Si $v_2 \gg v_1$ alors $h_1 \gg h_2$, donc on peut simplifier

$H_0 = h_1$ en effet h_2 est déjà dans l'intervalle d'écoulement fluvial, donc $h_2 > h_{cB} > h_{cB}$
on a donc $h_1 \gg h_{cB}$ et alors $\frac{Q}{2h_1^2B^2g} \ll h_1$

Au final $\boxed{Q = b h_2 \sqrt{2(h_1 - h_2) g}}$.

autre approche : $h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) \simeq \frac{1}{2g} v_2^2 \quad \text{car } v_2 \gg v_1$$

ie $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$

et $Q = v_2 h_2 b = b h_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$:)

8) Étant donné que le régime critique est atteint, on a nécessairement

d'après la question 3 : $H = H_c = \frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{b^2 g}\right)^{1/3}$

Par ailleurs

$$H = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \simeq h_1 \quad \text{car } v_1 \ll \sqrt{2gh_1}$$

Ainsi, $h_1 = \left(\frac{Q}{b}\right)^{2/3} \times \frac{1}{g^{1/3}} \times \frac{3}{2}$ ie $\boxed{Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} b\sqrt{g}\, h_1^{3/2}}$

9) Pour un jaugeur noyé, il faut mesurer h_1 et h_2, donc on a 2 sources d'incertitudes. Par ailleurs, $h_2 - h_1$ est très faible et donc l'incertitude relative sera plus grande que celle de mesure sur h_1 et h_2

Au contraire, pour un jaugeur dénoyé, il n'y a qu'une mesure à faire (h_1) et l'incertitude relative sera plus petite que celle sur $h_2 - h_1$.